अध्याय 7

7.1 समग्र अवलोकन (Overview)

7.1.1 मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}(\text{F}(x)) = f(x)$ है। तब, हम $\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + \text{C}$ लिखते हैं। ये समाकल *अनिश्चित समाकल* या *व्यापक समाकल* कहलाते हैं। C समाकलन का *स्थिरांक* या *अचर* कहलाता है। इन सभी समाकलों का अंतर एक अचर होता है।

7.1.2 यदि दो फलनों का अंतर एक अचर हो तो उनका एक ही अवकलज होता है।

7.1.3 ज्यामितीय रूप से, कथन $\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + \text{C} = y$ (मान लीजिए) वक्रों के एक कुल को निरूपित करता है। C के विभिन्न मान इस कुल के विभिन्न सदस्यों के संगत होते हैं तथा ये सभी सदस्य इन वक्रों में से किसी एक को स्वयं उसके समांतर स्थानांतरित करके प्राप्त किए जा सकते हैं। साथ ही, एक रेखा $x = a$ और इन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदुओं पर वक्रों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं।

7.1.4 ***अनिश्चित समाकलों के कुछ गुण***

(i) अवकलन और समाकलन की प्रक्रियाएँ एक दूसरे की प्रतिलोम या विपरीत प्रक्रियाएँ होती है अर्थात, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ और $\int f'(x)dx = f(x) + \text{C}$ होता है, जहाँ C कोई स्वैच्छिक स्थिरांक या अचर है।

(ii) एक ही अवकलज वाले दो अनिश्चित समाकलों से वक्रों का एक ही कुल प्राप्त होता है और इसीलिए ये समतुल्य होते हैं। अतः, यदि f और g दो ऐसे फलन हैं कि $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$ है, तो $\int f(x)\,dx$ और $\int g(x)\,dx$ समतुल्य होते हैं।

(iii) दो फलनों के योग का समाकल इन फलनों के समाकलों के योग के बराबर होता है। अर्थात्, $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ होता है।

© NCERT not to be republished

(iv) एक अचर गुणक को समाकल चिन्ह के या तो पहले या बाद में लिखा जा सकता है। अर्थात्, $\int a\, f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx$ है, जहाँ a एक अचर है।

(v) गुणों (iii) और (iv) को फलनों $f_1, f_2, ..., f_n$ की एक परिमित संख्या तथा वास्तविक $k_1, k_2, ..., k_n$ संख्याओं के लिए व्यापीकृत किया जा सकता है, जिससे

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ..., + k_n f_n(x))\, dx = k_1\int f_1(x)\, dx + k_2\int f_2(x)\, dx + ... + k_n\int f_n(x)\, dx$$

7.1.5 समाकलन की विधियाँ

समाकल ज्ञात करने के लिए कई विधियाँ या तकनीकें हैं, जहाँ हम फलन f का प्रतिअवकलज प्रत्यक्ष रूप से नहीं चुन सकते हैं। यहाँ हम इन्हें मानक रूपों में बदलते हैं। इनमें से कुछ विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं–

1. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 2. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 3. खंडशः समाकलन

7.1.6 निश्चित समाकल

निश्चित समाकल को $\int_a^b f(x)\, dx$, से व्यक्त किया जाता है, जहाँ a समाकल की निम्न सीमा है तथा b समाकल की उच्च (या उपरि) सीमा है। निश्चित समाकल का मान निम्नलिखित दो विधियों से ज्ञात किया जाता है–

(i) योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

(ii) $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, यदि $f(x)$ फलन $f(x)$ का एक प्रति अवकलज है।

7.1.7 योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\, dx$ वक्र $y = f(x)$, $(y > 0)$ कोटियों $x = a$ और $x = b$ तथा x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल है, निम्न प्रकार लिखा जाता है:

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)\right]$$

© NCERT not to be republished

अथवा

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h \to 0} h\left[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)\right]$$

जहाँ $h = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ जब $n \to \infty$.

7.1.8 कलन की मूलभूत प्रमेय

(i) ***क्षेत्रफल फलन*** : फलन A (x) क्षेत्रफल फलन को व्यक्त करता है तथा इसे

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

(ii) ***समाकलन की प्रथम मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक सतत फलन है तथा मान लीजिए कि A (x) क्षेत्रफल फलन है। तब, सभी $x \in [a, b]$ के लिए, $A'(x) = f(x)$ होता है।

(iii) ***समाकलन की द्वितीय मूलभूत प्रमेय***

मान लीजिए कि एक बंद अंतराल $[a, b]$ पर परिभाषित f एक सतत फलन है तथा F फलन f का एक प्रतिअवकलज है तब,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

7.1.9 निश्चित समाकलों के कुछ गुण

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, विशिष्ट रूप में, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; $a < c < b$

© NCERT not to be republished

$$P_3 : \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

$$P_4 : \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$P_5 : \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

$$P_6 : \int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx, \text{ यदि } f(2a-x) = f(x), \\ 0, \text{ यदि } f(2a-x) = -f(x). \end{cases}$$

P_7 : (i) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि f एक सम फलन है, अर्थात् $f(-x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, यदि f एक विषम फलन है, अर्थात्, $f(-x) = -f(x)$

7.2 हल किए हुए उदाहरण

सक्षिप्त उत्तर (S.A.)

उदाहरण 1 x के सापेक्ष $\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)$ को समाकलित कीजिए।

हल $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

$$= \int 2a(x)^{\frac{-1}{2}}\,dx - \int bx^{-2}\,dx + \int 3c\,x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9cx^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

उदाहरण 2 $\frac{3ax}{b^2 + c^2x^2}dx$ का मान निकालिए।

© NCERT not to be republished

हल मान लीजिए कि $v = b^2 + c^2x^2$, तब $dv = 2c^2\, xdx$ है।

अतः, $$\int \frac{3ax}{b^2+c^2x^2}dx = \frac{3a}{2c^2} \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{3a}{2c^2}\log|v| + c\frac{3a}{2c^2}\log\left|b^2+c^2x^2\right| + \text{C}$$

उदाहरण 3 समाकलन की एक प्रतिअवकलज के रूप में अवधारणा का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \text{C}$$

हल $$\frac{d}{dx}\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \text{C}$$

$$= 1 - \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{3} - \frac{1}{x+1}$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

इस प्रकार, $$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \log|x+1| + \text{C}\right) = \int \frac{x^3}{x+1}dx$$

उदाहरण 4 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$, का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $\text{I} = \int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + \text{I}_1$,

जहाँ $\text{I}_1 = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ है।

© NCERT not to be republished

$1 - x^2 = t^2$ रखिए, जिससे $-2x\,dx = 2t\,dt$ अतः,

$$I_1 = - \quad dt = -t + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

अतः, $$I = \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$$

उदाहरण 5 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$, $\beta > \alpha$ का मान निकालिए।

हल $x - \alpha = t^2$ रखिए। तब, $\beta - x = \beta - \left(t^2 + \alpha\right) = \beta - t^2 - \alpha = -t^2 - \alpha + \beta$ तथा $dx = 2t\,dt$

$$I = \int \frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2\left(\beta - \alpha - t^2\right)}} = \int \frac{2\,dt}{\sqrt{\left(\beta - \alpha - t^2\right)}}$$

$$= 2 \quad \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}}, \text{ जहाँ } k^2 = \beta - \alpha$$

$$= 2\sin^{-1}\frac{t}{k} + C = 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + C$$

उदाहरण 6 $\int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$ का मान निकालिए।

हल $$I = \int \tan^8 x \sec^4 x\,dx$$

$$= \int \tan^8 x \left(\sec^2 x\right) \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^8 x \left(\tan^2 x + 1\right) \sec^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{10} x \sec^2 x\,dx + \int \tan^8 x \sec^2 x\,dx$$

$$= \frac{\tan^{11} x}{11} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 7 $\int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$ ज्ञात कीजिए

हल $x^2 = t$ रखिए। तब, $2x\,dx = dt$

अब, $I = \int \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2+3t+2}$

मान लीजिए कि $\frac{t}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें, $A=-1, B=2$ प्राप्त होता है।

तब, $I = \frac{1}{2}\left[2\int \frac{dt}{t+2} - \int \frac{dt}{t+1}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2\log|t+2| - \log|t+1|\right]$

$= \log\left|\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

उदाहरण 8 $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ ज्ञात कीजिए।

हल अंश और हर को $\cos^2 x$, से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है

$I = \frac{\sec^2 x\,dx}{2\tan^2 x + 5}$

$\tan x = t$ रखिए, जिससे $\sec^2 x\,dx = dt$ होगा। तब,

$I = \int \frac{dt}{2t^2+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{5}}\right) + \text{C}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\tan x\right) + \text{C}.$$

उदाहरण 9 योग की सीमा के रूप में, $\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx$ का मान निकालिए।

हल यहाँ $a = -1$, $b = 2$, तथा $h = \frac{2+1}{n}$ है। अर्थात्, $nh = 3$ और $f(x) = 7x - 5$ है।

अब, हमें प्राप्त है :

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(-1) + f(-1+h) + f(-1+2h) + ... + f(-1+(n-1)h)\right]$$

ध्यान दीजिए कि

$f(-1) = -7 - 5 = -12$

$f(-1 + h) = -7 + 7h - 5 = -12 + 7h$

$f(-1 + (n-1)h) = 7(n-1)h - 12$

अतः

$$\int_{-1}^{2}(7x-5)\,dx = \lim_{h\to 0} h\left[(-12) + (7h - 12) + (14h - 12) + ... + (7(n-1)h - 12)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\left[1 + 2 + ... + (n-1)\right] - 12n\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[7h\,\frac{(n-1)n}{2} - 12n\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{7}{2}(nh)(nh-h) - 12nh\right]$$

$$= \frac{7}{2}(3)(3-0) - 12\times 3 = \frac{7\times 9}{2} - 36 = \frac{-9}{2}$$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 10 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7 x}{\cot^7 x + \tan^7 x} dx \quad ...(1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan^7\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \quad (P_4 \text{ द्वारा})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot^7 x dx}{\cot^7 x + \tan^7 x} \quad ...(2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tan^7 x + \cot^7 x}{\tan^7 x + \cot^7 x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \text{या} \quad I = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 11 $\int_2^8 \frac{\sqrt{10 - x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10 - x}} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$I = \int_2^8 \frac{\sqrt{10 - x}}{\sqrt{x} + \sqrt{10 - x}} dx \quad ...(1)$$

© NCERT not to be republished

$$= \int_2^8 \frac{\sqrt{10-(10-x)}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{10-(10-x)}}\,dx \qquad (P_3 \text{ द्वारा})$$

$$\Rightarrow \qquad I = \int_2^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{10-x}+\sqrt{x}}\,dx \qquad (2)$$

(1) और (2), को जोड़ने पर: $2I = \int_2^8 1dx = 8-2=6$

अतः, $I = 3$ हुआ।

उदाहरण 12 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x+\cos x)\,dx$$

$$= (-\cos x+\sin x)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = 1$$

उदाहरण 13 $x^2\tan^{-1}x\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $I = x^2\tan^{-1}x\,dx$

$$= \tan^{-1}x\int x^2dx - \int\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^3}{3}dx$$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\tan^{-1}x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log\left|1+x^2\right| + C$$

उदाहरण 14 $\int\sqrt{10-4x+4x^2}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I = \sqrt{10-4x+4x^2}\,dx = \sqrt{(2x-1)^2+(3)^2}\,dx$

$t = 2x - 1$ रखिए, जिससे $dt = 2dx$

अतः, $$I = \frac{1}{2}\int\sqrt{t^2+(3)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\,t\,\frac{\sqrt{t^2+9}}{2} + \frac{9}{4}\log\left|t+\sqrt{t^2+9}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+9} + \frac{9}{4}\log\left|(2x-1)+\sqrt{(2x-1)^2+9}\right| + C$$

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 15 $\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $x^2 = t$ तब,

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{t}{t^2+t-2} = \frac{t}{(t+2)(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1}$$

अतः, $t = A(t-1) + B(t+2)$

© NCERT not to be republished

गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2-1}$$

इस प्रकार $$\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}\,dx = \frac{2}{3}\int\frac{1\,dx}{x^2+2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-1}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

उदाहरण 16 $\frac{x^3+x}{x^4-9}dx$ का मान निकालिए।

हल हमें प्राप्त है : $I = \frac{x^3+x}{x^4-9}dx = \frac{x^3}{x^4-9}dx + \frac{x\,dx}{x^4-9} = I_1 + I_2$.

अब $$I_1 = \int\frac{x^3dx}{x^4-9}$$

$t = x^4 - 9$ रखिए, जिससे $4x^3\,dx = dt$

इस प्रकार $$I_1 = \frac{1}{4}\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\log|t| + C_1 = \frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right| + C_1$$

पुनः $$I_2 = \int\frac{x}{x^4-9}dx$$

$x^2 = u$ रखिए, जिससे $2x\,dx = du$ तब,

$$I_2 = \frac{1}{2}\ \frac{du}{u^2-(3)^2} = \frac{1}{2\times 6}\log\left|\frac{u-3}{u+3}\right| + C_2$$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C_2$$

इस प्रकार $I = I_1 + I_2$

$$= \frac{1}{4}\log\left|x^4-9\right| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C$$

उदाहरण 17 दर्शाइए कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

हल मान लीजिए $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx \quad \text{(P4 द्वारा)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}dx$$

अतः, हमें प्राप्त होता है : $2I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - \left\{\log\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right) - \log\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1}\right) \quad = \frac{2}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

अतः, $$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

उदाहरण 18 $\int_0^1 x(\tan^{-1}x)^2\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $$I = \int_0^1 x(\tan^{-1}x)^2\,dx$$

समाकलन द्वारा, हमें प्राप्त होता है:

$$I = \frac{x^2}{2}\left[(\tan^{-1}x)^2\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 . 2\frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} . \tan^{-1}x\,dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - I_1, \text{ जहाँ } I_1 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\tan^{-1}x\,dx \text{ है।}$$

अब $$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\tan^{-1}x\,dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\tan^{-1} x\,dx$$

$$= I_2 - \frac{1}{2}\left((\tan^{-1} x)^2\right)_0^1 \qquad = I_2 - \frac{\pi^2}{32}$$

यहाँ $\quad I_2 = \int_0^1 \tan^{-1} x\,dx = (x\tan^{-1} x)_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\log\left|1+x^2\right|\right)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

इस प्रकार, $I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi^2}{32}$

अतः, $\quad I = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

$$= \frac{\pi^2 - 4\pi}{16} + \log\sqrt{2}$$

उदाहरण 19 $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$, का मान निकालिए, जहाँ $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$

हल हम f को $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{यदि } -1 < x \le 0 \\ x + 2, & \text{यदि } 0 < x \le 1 \\ 3x, & \text{यदि } 1 < x \le 2 \end{cases}$ के रूप में पुनः परिभाषित कर सकते हैं।

अतः, $\quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}(2-x)\,dx + \int_{0}^{1}(x+2)\,dx + \int_{1}^{2} 3x\,dx \qquad (P_2 \text{ से})$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)_{0}^{1} + \left(\frac{3x^2}{2}\right)_{1}^{2}$$

© NCERT not to be republished

$$= 0 - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) + 3\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 20 से 28 तक प्रत्येक में दिए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

उदाहरण 20 $\int e^x(\cos x - \sin x)\,dx$ बराबर है

(A) $e^x \cos x + C$ (B) $e^x \sin x + C$

(C) $-e^x \cos x + C$ (D) $-e^x \sin x + C$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\int e^x[f(x) + f'(x)]\,dx = e^x f(x) + C$ यहाँ $f(x) = \cos x$ और $f'(x) = -\sin x$

उदाहरण 21 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $(\tan x + \cot x)^2 + C$

(C) $\tan x - \cot x + C$ (D) $(\tan x - \cot x)^2 + C$

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \tan x - \cot x + C$$

उदाहरण 22 यदि $\int \frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}}\,dx = ax + b \log|4e^x + 5e^{-x}| + C$ है, तो

(A) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{7}{8}$ (B) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{7}{8}$

(C) $a = \frac{1}{-8}, b = \frac{-7}{8}$ (D) $a = \frac{1}{8}, b = \frac{-7}{8}$

© NCERT not to be republished

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि दोनों पक्षों का अवकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{3e^x - 5e^{-x}}{4e^x + 5e^{-x}} = a + b\,\frac{\left(4e^x - 5e^{-x}\right)}{4e^x + 5e^{-x}}\ ,\ \text{जिससे}$$

$3e^x - 5e^{-x} = a\,(4e^x + 5e^{-x}) + b\,(4e^x - 5e^{-x})$ प्राप्त होता है। दोनों पक्षों में, गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $3 = 4a + 4b$ और $-5 = 5a - 5b$ प्राप्त होता है। इससे $a = \frac{-1}{8}$ और $b = \frac{7}{8}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 23 $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$ बराबर है

(A) $\int_a^b f(x-c)\,dx$ (B) $\int_a^b f(x+c)\,dx$ (C) $\int_a^b f(x)\,dx$ (D) $\int_{a-c}^{b-c} f(x)\,dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $x = t + c$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\text{I} = \int_a^b f(c+t)\,dt = \int_a^b f(x+c)\,dx$$

उदाहरण 24 यदि [0, 1] में f और g ऐसे सतत फलन हैं, जो $f(x) = f(a-x)$ और $g(x) + g(a-x) = a$, को संतुष्ट करते हैं, तो $\int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$ बराबर है

(A) $\frac{a}{2}$ (B) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ (C) $\int_0^a f(x)\,dx$ (D) $a\int_0^a f(x)\,dx$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\text{I} = \int_0^a f(x)\cdot g(x)\,dx$

$$= \int_0^a f(a-x)\;g(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,(a - g(x))\,dx$$

© NCERT not to be republished

$$= a\int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x).g(x)\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx - \mathrm{I}$$

या $\quad \mathrm{I} = \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$

उदाहरण 25 यदि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}}$ और $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ay$, है, तो a बराबर है

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 1

हल (C) सही उत्तर है, क्योंकि $x = \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+9t^2}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1+9y^2}}$

जिससे $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{18y}{2\sqrt{1+9y^2}} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 9y$

उदाहरण 26 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$ बराबर है

(A) log 2 (B) 2 log 2 (C) $\dfrac{1}{2}\log 2$ (D) 4 log 2

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3+|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$

$$= \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+2|x|+1} + \int_{-1}^1 \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx = 0 + 2\int_0^1 \frac{|x|+1}{x^2+2|x|+1}\,dx$$

[विषम फलन + सम फलन]

$$= 2\int_0^1 \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = 2\left|\log|x+1|\right|_0^1 = 2\log 2$$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 27 यदि $\int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt = a$, है, तब $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt$ बराबर है

(A) $a - 1 + \frac{e}{2}$ (B) $a + 1 - \frac{e}{2}$ (C) $a - 1 - \frac{e}{2}$ (D) $a + 1 + \frac{e}{2}$

हल (B) सही उत्तर है, क्योंकि $\text{I} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt = \left|\frac{1}{1+t} e^t\right|_0^1 + \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} dt = a$ (दिया है)

अत:, $\int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^2} = a - \frac{e}{2} + 1$

उदाहरण 28 $\int_{-2}^{2} |x \cos \pi x| \, dx$ बराबर है

(A) $\frac{8}{\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$ (C) $\frac{2}{\pi}$ (D) $\frac{1}{\pi}$

हल (A) सही उत्तर है, क्योंकि $\text{I} = \int_{-2}^{2} |x \cos \pi x| \, dx = 2 \int_0^2 |x \cos \pi x| \, dx$

$$= 2 \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} |x \cos \pi x| \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |x \cos \pi x| \, dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} |x \cos \pi x| \, dx \right\} = \frac{8}{\pi}$$

उदाहरणों 29 से 32 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए–

उदाहरण 29 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx =$ ________

हल $\frac{\tan^7 x}{7} + \text{C}$

© NCERT not to be republished

उदाहरण 30 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ है, यदि f एक ________ फलन है।

हल विषम

उदाहरण 31 $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$, यदि $f(2a-x) =$ ________

हल $f(x)$

उदाहरण 32 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x\,dx}{\sin^n x + \cos^n x} =$ ________

हल $\frac{\pi}{4}$

7.3 प्रश्नावली

संक्षित उत्तर (S.A.)

निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए–

1. $\int \frac{2x-1}{2x+3}dx = x - \log|(2x+3)^2| + C$

2. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \log|x^2+3x| + C$

निम्नलिखित के मान निकालिए–

3. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+1}$

4. $\int \frac{e^{6\log x} - e^{5\log x}}{e^{4\log x} - e^{3\log x}}dx$

5. $\int \frac{(1+\cos x)}{x+\sin x}dx$

6. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

7. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

8. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$

9. $\int \sqrt{1+\sin x} dx$

10. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx$ (**संकेत** : $\sqrt{x} = z$ रखिए)

11. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$

12. $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}} dx$ (**संकेत** : $x = z^4$ रखिए)

13. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

15. $\int \frac{dt}{\sqrt{3t-2t^2}}$

16. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+9}} dx$

17. $\int \sqrt{5-2x+x^2} dx$

18. $\int \frac{x}{x^4-1} dx$

19. $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx$ [$x^2 = t$ रखिए]

20. $\int \sqrt{2ax-x^2} \, dx$

21. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

22. $\int \frac{(\cos 5x + \cos 4x)}{1-2\cos 3x} dx$

23. $\int \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

24. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}} dx$

25. $\int \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x} dx$

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$ (**संकेत** : $x^2 = \sec\theta$ रखिए)

© NCERT not to be republished

निम्नलिखित का योग की सीमा के रूप में मान निकालिए–

27. $\int_0^2 (x^2+3)\,dx$

28. $\int_0^2 e^x\,dx$

निम्नलिखित का मान निकालिए–

29. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\,dx}{1+m^2\tan^2 x}$

31. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

32. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

33. $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x\,dx$

34. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

(**संकेत:** $x = \sin\theta$ रखिए)

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

35. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2-12}$

36. $\frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

37. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}$

38. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx$

39. $\int e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)dx$

40. $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx$

(**संकेत**: $x = a\tan^2\theta$ रखिए)

© NCERT not to be republished

41. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{(1-\cos x)^{\frac{5}{2}}} dx$

42. $\int e^{-3x} \cos^3 x \, dx$

43. $\int \sqrt{\tan x} \, dx$ (**संकेत:** $\tan x = t^2$ रखिए)

44. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}$

(**संकेत:** अंश और हर को $\cos^4 x$ से भाग दीजिए)

45. $\int_0^1 x \log(1+2x) \, dx$

46. $\int_0^{\pi} x \log \sin x \, dx$

47. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin x + \cos x) dx$

उद्देश्यात्मक प्रश्न

प्रश्न 48 से 58 तक प्रत्येक में दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-

48. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\theta}{\cos x - \cos \theta} dx$ बराबर है

(A) $2(\sin x + x\cos\theta) + C$

(B) $2(\sin x - x\cos\theta) + C$

(C) $2(\sin x + 2x\cos\theta) + C$

(D) $2(\sin x - 2x \cos\theta) + C$

49. $\frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$ बराबर है

(A) $\sin(b-a) \log \left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(B) $\text{cosec}(b-a) \log \left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

(C) $\text{cosec}(b-a) \log \left|\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}\right| + C$

(D) $\sin(b-a) \log \left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right| + C$

© NCERT not to be republished

50. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$ बराबर है

(A) $(x+1)\ \tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

(B) $x\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$

(C) $\sqrt{x}-x\tan^{-1}\sqrt{x}+C$

(D) $\sqrt{x}-(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}+C$

51. $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$ बराबर है

(A) $\frac{e^x}{1+x^2}+C$

(B) $\frac{-e^x}{1+x^2}+C$

(C) $\frac{e^x}{(1+x^2)^2}+C$

(D) $\frac{-e^x}{(1+x^2)^2}+C$

52. $\int \frac{x^9\,dx}{(4x^2+1)^6}$ बराबर है

(A) $\frac{1}{5x}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5}+C$

(B) $\frac{1}{5}\left(4+\frac{1}{x^2}\right)^{-5}+C$

(C) $\frac{1}{10x}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5}+C$

(D) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{x^2}+4\right)^{-5}+C$

53. यदि $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = a\log|1+x^2| + b\tan^{-1}x + \frac{1}{5}\log|x+2| + C$ है, तो

(A) $a=\frac{1}{-10}$, $b=\frac{2}{-5}$

(B) $a=\frac{1}{10}$, $b=-\frac{2}{5}$

(C) $a=\frac{1}{-10}$, $b=\frac{2}{5}$

(D) $a=\frac{1}{10}$, $b=\frac{2}{5}$

© NCERT not to be republished

54. $\int \frac{x^3}{x+1} dx$ बराबर है

(A) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+C$

(B) $x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1-x|+C$

(C) $x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+C$

(D) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\log|1+x|+C$

55. $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx$ बराबर है

(A) $\log|1+\cos x|+C$

(B) $\log|x+\sin x|+C$

(C) $x-\tan\frac{x}{2}+C$

(D) $x.\tan\frac{x}{2}+C$

56. यदि $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}} = a(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + b\sqrt{1+x^2} + C$ है, तो

(A) $a=\frac{1}{3}$, $b=1$

(B) $a=\frac{-1}{3}$, $b=1$

(C) $a=\frac{1}{-3}$, $b=-1$

(D) $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$

57. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ बराबर है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

58. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ बराबर है

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$

(C) 2

(D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

© NCERT not to be republished

प्रश्नों 59 से 63 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए –

59. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, e^{\sin x} dx$ के $=$ ________.

60. $\int \frac{x+3}{(x+4)^2} e^x dx =$ ________ .

61. यदि $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8}$ है, तो $a =$ ________ .

62. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos^2 x} dx =$ ________ .

63. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ का मान ________.

© NCERT not to be republished